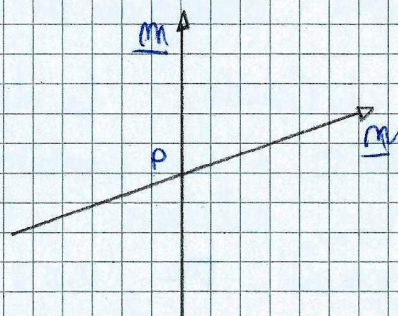


La deformazione in un punto

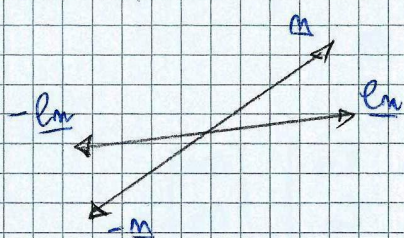
4

Ogni fibra di una stella di fibre passanti per un punto p subisce una deformazione differente. Quella em riguarda la fibra diretta lungo $\underline{m}$ e sarà diversa da em, la deformazione della fibra diretta lungo $\underline{m}$.



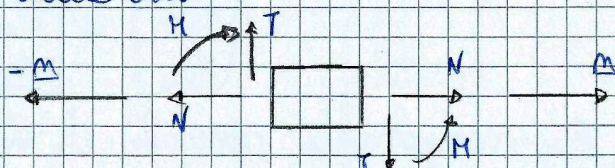
Per studiare la deformazione em è pertanto necessario riferirsi alla direzione $\underline{m}$. Per sapere quali informazioni rendono nota em servono due teoremi: lemma e teorema di Cauchy.

Lemma di Cauchy: il vettore deformazione in direzione $\underline{m}$ è l'opposto del vettore relativo alla direzione orientata da $\underline{m}$:

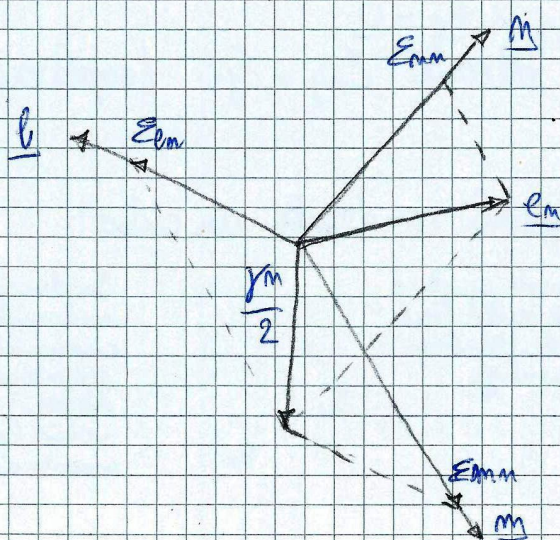


$$\underline{e}_{-m} = -\underline{e}_m$$

Infatti così funziona la convenzione NTH delle travi:



Prima di passare al teorema introduciamo una terna intrinseca (due assi a complemento dell'asse $\underline{m}$) e metteremo em:



$$\underline{e}_m = \underline{e}_{em} \cdot \underline{l} + \underline{e}_{mn} \underline{m} + \underline{e}_{nn} \underline{n}$$

deformazione
assiale

deformazione
matriciale

$$\underline{e}_{em} = \underline{l} \cdot \underline{e}_m = \underline{l}^T \cdot \underline{e}_m$$

$$\underline{e}_{mn} = \underline{m} \cdot \underline{e}_m = \underline{m}^T \cdot \underline{e}_m$$

$$\underline{e}_{nn} = \underline{n} \cdot \underline{e}_m = \underline{n}^T \cdot \underline{e}_m$$

$\underline{e}_{em}, \underline{e}_{mn}$ deformazioni trasversali

$\underline{e}_{nn}$ deformazione longitudinale $\square$

Per definizione diciamo:

$$\gamma_m := 2 \sqrt{\epsilon_{ln}^2 + \epsilon_{mn}^2}$$

Da ciò $\frac{\gamma_m}{2}$, proiezione di $\underline{\epsilon}_m$ sul piano di l e m , $\frac{1}{2}$ è la componente fisica di deformazione. Quindi γ_m è la 2^a deformazione trasversale risultante (massima deformazione trasversale) tra tutte le direzioni ortogonali a $\underline{m}$.

Teorema fondamentale di Cauchy: la deformazione $\underline{\epsilon}_m$ relativa alla direzione (orientata) $\underline{m}$, è una combinazione lineare delle deformazioni $\underline{\epsilon}_j$, $j=1,2,3$, relative a tre direzioni (orientate) $\underline{a}_j$ mutuamente ortogonali:

$$\underline{\epsilon}_m = \underline{\epsilon}_1 m_1 + \underline{\epsilon}_2 m_2 + \underline{\epsilon}_3 m_3 = \sum_{j=1}^3 \underline{\epsilon}_j m_j$$

In cui $m_j = \underline{m} \cdot \underline{a}_j$ sono i coseni direttori di $\underline{m}$ rispetto al j -esimo asse.

In definitiva $\underline{\epsilon}_m$ è noto conoscendo le deformazioni secondo tre direzioni mutuamente ortogonali.

Come è già accaduto per la rotazione rigida, possiamo introdurre un tensore deformazione infinitesimale:

$$\underline{\epsilon}_m = \underline{E} \underline{m}$$

In componenti:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{1m} \\ \epsilon_{2m} \\ \epsilon_{3m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

Con $\underline{\epsilon}_{ij}$ componenti speciali di deformazione:

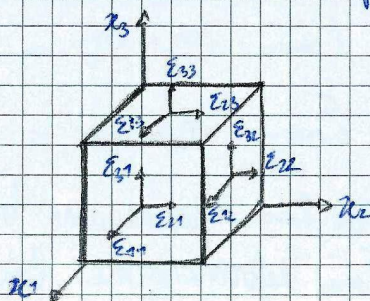
$$\underline{\epsilon}_j = \sum_{i=1}^3 \underline{\epsilon}_{ij} \underline{a}_i = \epsilon_{j1} \underline{a}_1 + \epsilon_{j2} \underline{a}_2 + \epsilon_{j3} \underline{a}_3$$

La matrice $\underline{E}$ è simmetrica. Lo si può dimostrare sfruttando la proprietà di reciprocità, cioè che:

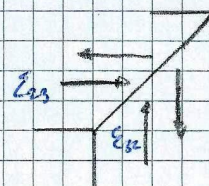
$$\sum_{j=1}^3 \underline{a}_j \times \underline{\epsilon}_j = \underline{0}$$

Sviluppando la sommatoria si ottiene $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ (esplicitando $\underline{\epsilon}_j = \sum_{i=1}^3 \underline{\epsilon}_{ij} \underline{a}_i$).

Si possono visualizzare le componenti speciali mediante un cubo:



Componenti uguali e opposte sulle facce opposte (lemma di Cauchy).



In due piani ortogonali qualsiasi le componenti a indici distinti sono uguali e dirette entrambe verso lo spigolo o uscenti da esso.

Le equazioni di congruenza

Le componenti spaziali di deformazione ϵ_{ij} sono legate agli spostamenti dalle equazioni di congruenza:

$$\epsilon_{ij} = \underline{e}_j \cdot \underline{a}_i = \frac{du}{\partial x_j} \cdot \underline{a}_i - \underline{u} \times \underline{a}_j \cdot \underline{a}_i$$

Si ha:

$$\underline{a}_i \times \underline{a}_j = 0 \quad \text{se } i=j$$

$$\underline{a}_i \times \underline{a}_j = \underline{a}_k \quad \text{se } i \neq j$$

Perciò:

$$\epsilon_{ij} = \frac{du}{\partial x_j} \cdot \underline{a}_i - \underline{a}_j \times \underline{a}_i \cdot \underline{u} = \frac{du}{\partial x_j} \underline{a}_i + \underline{a}_k \cdot \underline{u} \quad \text{se } i \neq j$$

In definitiva:

$$\text{se } i=j \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Rightarrow \epsilon_{ii} = u_{ii}$$

$$\text{se } i \neq j \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_k = u_{ij} - \frac{1}{2} (u_{ij} - u_{ji}) = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})$$

Completamente si ottiene:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji})$$

Formule che danno luogo a sei equazioni:

$$\epsilon_{11} = u_{11}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2} (u_{22} + u_{22})$$

$$\epsilon_{22} = u_{22}$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} (u_{23} + u_{32})$$

$$\epsilon_{33} = u_{33}$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{2} (u_{31} + u_{13})$$

Perbacco il tensore $\underline{\epsilon}$ risulta:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} u_{11} & \frac{1}{2}(u_{12} + u_{21}) & \frac{1}{2}(u_{13} + u_{31}) \\ & u_{22} & \frac{1}{2}(u_{23} + u_{32}) \\ \text{SIMMETRICA} & & u_{33} \end{bmatrix}$$

La decomposizione del gradiente di spostamento

Qualmente a $\underline{e}_m$ e $\underline{w}_m$, $\underline{g}_m$ è esprimibile come prodotto tra un tensore (il tensore gradiente di spostamento $\underline{G}$) e il vettore $\underline{m}$:

$$\underline{g}_m := \frac{du}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dx_m} = \underline{G} \underline{m}$$

Utilizzando $\underline{e}_m = \underline{E} \underline{m}$, $\underline{w}_m = \underline{W} \underline{m}$ e $\underline{g}_m = \underline{G} \underline{m}$ otteniamo:

$$\underline{g}_m = \underline{e}_m + \underline{w}_m \Rightarrow \underline{G} \underline{m} = \underline{E} \underline{m} + \underline{W} \underline{m} \Rightarrow \underline{G} = \underline{E} + \underline{W}$$

Possiamo così decomporre la matrice $\underline{G}$ in una parte simmetrica $\underline{E}$ e in una antisimmetrica $\underline{W}$:

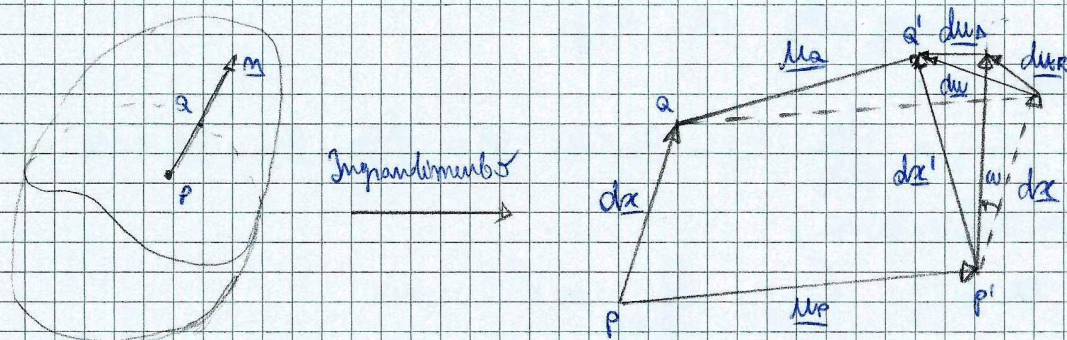
$$\underline{E} := \frac{1}{2} (\underline{G} + \underline{G}^T)$$

$$\underline{W} := \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{G}^T)$$

Aspetto geometrico sempre valido per una matrice quadrata.

La trasformazione nell'intorno

Ora siamo pronti per descrivere ciò che accade a seguito di una deformazione nell'intorno di un punto P . È noto lo spostamento $\underline{u}$ e vogliamo ottenere $\underline{e}_m$, $\underline{u}_m$, $\underline{\Gamma}$ e $\underline{W}$. Useremo un ingrandimento dell'intorno e della sua trasformazione:



Se il vettore $\underline{P}a = d\underline{x}$ avesse subito solo una trasformazione rigida, si avrebbe ubriacato in corrispondenza del vettore braccia, $\underline{u}_a$ (estremo destro nel disegno). Invece a è finito in a' , subendo uno spostamento $\underline{du}$ rispetto al caso rigido. Tale $\underline{du}$ è formato da una parte di rotazione rigida $\underline{dx}'$ e una deformativa $\underline{du}$:

$$\underline{du} = \underline{du}_R + \underline{du}_D$$

dal disegno si deduce pure che:

$$\underline{du} = \underline{u}_a - \underline{u}_p$$

Per le definizioni date in precedenza:

$$\underline{du}_D = \underline{g}_m d\underline{x}_m = \underline{\Gamma}_i d\underline{x}, \quad \underline{du}_R = \underline{u}_m d\underline{x}_m = \underline{W} d\underline{x}, \quad \underline{du}_a = \underline{e}_m d\underline{x}_m = \underline{\Gamma} d\underline{x}$$

Ecco quindi come lo spostamento è il risultato di una trasformazione che contempla $\underline{g}_m$, $\underline{u}_m$ e $\underline{e}_m$.

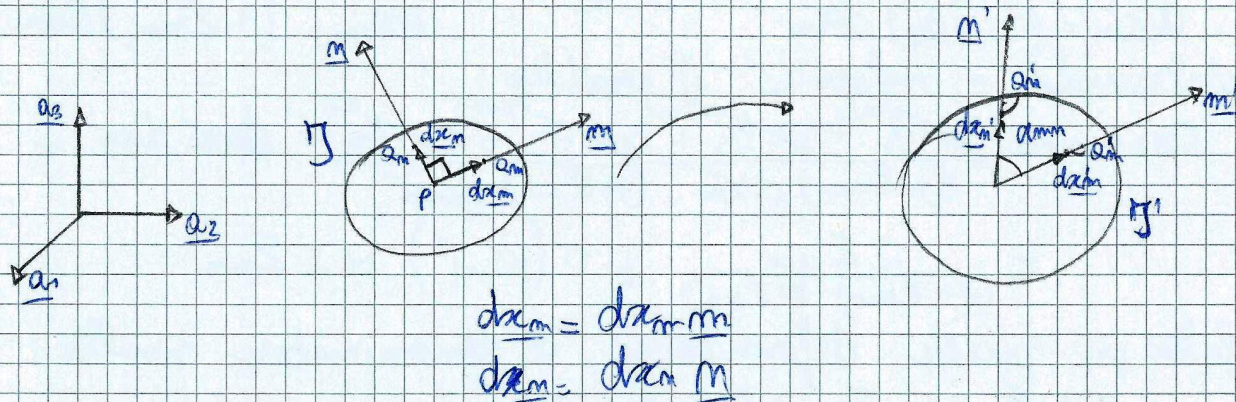
Sempre osservando la figura:

$$\underline{dx}' = \underline{dx} + \underline{du} = \underline{dx} + \underline{\Gamma}_i d\underline{x} = (\underline{I} + \underline{\Gamma}_i) d\underline{x}$$

Notiamo che $\underline{I} + \underline{\Gamma}_i = \underline{F}$, tensore gradiente del trasporto. Da ciò $\underline{dx}' = \underline{F} d\underline{x}$, detta trasformazione affine. Essa non manda più piani o rette (che rimangono, una volta trasformati, piane e rette) mantenere il parallelismo, ma non l'ortogonalità. Un cerchio diviene un'ellisse, un rettangolo un parallelogramma. I lati si allungano o si accorciano, ma tutti della stessa quantità per mantenere il parallelismo. Le componenti E_{ij} di $\underline{E}$ con $i=j$ (lungo la diagonale) descrivono l'allungamento, quelle con $i \neq j$ la deformazione angolare.

Grandezze fisiche di deformazione

Consideriamo la terna intrinseca $(\underline{e}, \underline{m}, \underline{n})$:



$$dx_m = dx_{mm}$$

$$dx_m = dx_m \underline{m}$$

L'imbando subisce deformazioni fisicamente diverse:
 - elongazione specifica (dilatazione) nella direzione orientata da $\underline{m}$:

$$\epsilon_m := \frac{dx_m' - dx_m}{dx_m}$$

Così $\epsilon_m := \frac{l_f - l_i}{l_i}$. Sappiamo che $dx_m' = \epsilon_m dx_m$. Inoltre lo stato finale è $dx_m' = dx_m + dx_m' = (\underline{m} + \epsilon_m) dx_m$.

Per tanto:

$$\begin{aligned} dx_m' &= \sqrt{dx_m \cdot dx_m'} = \sqrt{(\underline{m} + \epsilon_m)(\underline{m} + \epsilon_m)} dx_m = \\ &= \sqrt{\underline{m} \cdot \underline{m} + \underline{m} \cdot \epsilon_m + \epsilon_m \cdot \underline{m} + \epsilon_m \cdot \epsilon_m} dx_m = \\ &= \sqrt{1 + 2\epsilon_m + \epsilon_m^2} dx_m \approx \\ &\approx (1 + \epsilon_m) dx_m \end{aligned}$$

Introduciamo il risultato ottenuto nell'espressione di ϵ_m :

$$\epsilon_m = \frac{dx_m' - dx_m}{dx_m} = \frac{(1 + \epsilon_m) dx_m - dx_m}{dx_m} = 1 + \epsilon_m - 1 = \epsilon_m$$

La deformazione di una fibra che all'inizio è diretta lungo $\underline{m}$ è uguale a ϵ_m , componente di ϵ .

Quando $\underline{m}$ coincide con uno degli assi intrinseci gli elementi lungo la diagonale di $\underline{\epsilon}$ sono le dilatazioni specifiche nelle direzioni degli assi coordinati;

- scivimento angolare:

$$\gamma_{mn} := \frac{\pi}{2} - \alpha_{mn}$$

Consideriamo:

$$\cos \alpha_{mn} = \frac{dx_m \cdot dx_n}{dx_m dx_n} = \frac{(\underline{m} + \epsilon_m) \cdot (\underline{n} + \epsilon_n)}{dx_m \cdot dx_n} \cdot dx_m \cdot dx_n$$

Esprimendo gli stati deformati come somme di quelli iniziali più la deformazione. Si possono scrivere vettori

risultante e scalaremente:

$$dx_{cm} = (m + b_m) dx_m$$

$$dx_{cm} = (m + b_m) dx_m$$

$$dx_{cm} = (1 + \epsilon_{mm}) dx_m$$

$$dx_{cm} = (1 + \epsilon_{mm}) dx_m$$

Sostituendo e svolgendo il prodotto:

$$\cos \alpha_{mm} = \frac{\cancel{m \cdot m} + \cancel{m \cdot b_m} + \cancel{b_m \cdot m} + \cancel{b_m \cdot b_m}}{(1 + \epsilon_{mm}) dx_m (1 + \epsilon_{mm}) dx_m} \quad \begin{matrix} = \epsilon_{mm} \\ = \epsilon_{mm} \\ = 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{2 \epsilon_{mm}}{(1 + \epsilon_{mm}) (1 + \epsilon_{mm})} + o(|\epsilon_m|^2) \approx 2 \epsilon_{mm}$$

Infatti per piccole deformazioni il denominatore risulta:

$$1 + \epsilon_{mm} + \epsilon_{mm} + \epsilon_{mm} \epsilon_{mm} \approx 1$$

Quindi, sviluppando in serie:

$$\cos \alpha_{mm} \approx 2 \epsilon_{mm} \Rightarrow \cos \alpha_{mm} = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \left(\alpha_{mm} - \frac{\pi}{2} \right) + \dots$$

Si considera che α_{mm} è prossimo a $\frac{\pi}{2}$ (piccole variazioni angolari). Allora:

$$\gamma_{mm} = - \left(\alpha_{mm} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha_{mm} = 2 \epsilon_{mm} \Rightarrow \gamma_{mm} = 2 \epsilon_{mm}$$

La variazione angolare tra due fibre inizialmente ortogonali è uguale al doppio della componente ϵ_{mm} del vettore $\underline{\epsilon}_m$. Se m e n coincidono con due assi cartesiani:

$$\gamma_{i,j} = 2 \epsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Si ottiene:

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \frac{\gamma_{1,2}}{2} & \frac{\gamma_{1,3}}{2} \\ & \epsilon_2 & \frac{\gamma_{2,3}}{2} \\ & & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

- dilatazione superficiale:

$$\Delta s_{mm} = \frac{dS'_{mm} - dS_{mm}}{dS_{mm}} = \epsilon_{mm} + \epsilon_{mm}$$

- dilatazione volumetrica specifica (o cubica):

$$\Delta := \frac{dV' - dV}{dV} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

Se la terna intrinseca coincide con quella estrinseca, cioè $(\underline{e}_m, \underline{m}) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$:

$$\Delta := \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{tr } \underline{\Gamma}$$

La traccia tr di $\underline{\Gamma}$ è un invariante. Comunque siano orientati tutti i parallelepipedi subiscono la medesima dilatazione cubica.

Cambiamento di base

E è nota attraverso $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$. Vediamo come esprimerla nella nuova base $(\underline{l}, \underline{m}, \underline{n})$:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E_{ll} & E_{lm} & E_{ln} \\ E_{ml} & E_{mm} & E_{mn} \\ E_{nl} & E_{nm} & E_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{l}^T \\ \underline{m}^T \\ \underline{n}^T \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} \underline{l} \\ \underline{m} \\ \underline{n} \end{bmatrix}$$

Infatti ad esempio:

$$E_{lm} = \underline{l} \cdot \underline{e}_m = \underline{l} \cdot E \underline{m} = \underline{l}^T E \underline{m}$$

Deformazioni principali per E

Avendo affrontato il cambiamento di base, possiamo cercare la base con cui esprimere E nel modo più semplice possibile. Supponiamo allora che $\underline{e}_m \parallel \underline{m}$. Perciò:

$$\underline{e}_m = \lambda \underline{m} \Rightarrow E_{mm} = \lambda \quad E_{em} = 0 \quad E_{mn} = 0$$

Per il teorema di Cauchy $\underline{e}_m = E \underline{m}$. Combinando con la formula qui sopra:

$$\underline{e}_m = \lambda \underline{m} = E \underline{m} \Rightarrow (E - \lambda I) \underline{m} = 0$$

Si ottiene così un problema agli autovalori in forma standard. Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} E_{11} - \lambda & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} - \lambda & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione è data dalle bande a meno che $\det(E - \lambda I) = 0$. Ma vogliamo proprio questo caso, che è condizione necessaria e sufficiente affinché sia possibile semplificare la matrice E . Dal calcolo del determinante (che non esponiamo direttamente) si ottiene un'equazione caratteristica (o secolare):

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$$

In cui:

- $I_1 = \text{tr } E = E_{11} + E_{22} + E_{33}$ (traccia invariante di E);

- $I_2 = - \left(\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{12} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} \right)$

- $I_3 = \det E$

Non abbiamo esposto il calcolo del determinante.

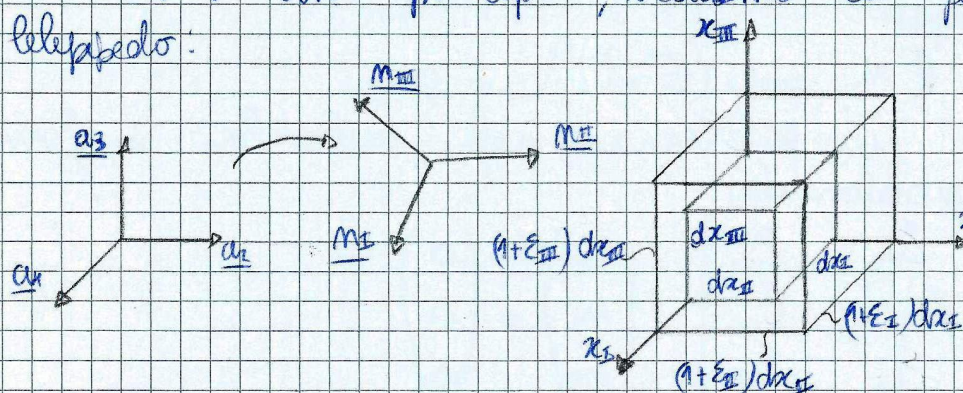
ma abbiamo comunque mostrato il valore esplicito dei tre invarianti I_1, I_2 e I_3 (di I ordine, II e III, cioè 1, 2, 3). Non solo la traccia, rappresentata da I_1 , è un invariante, ma lo sono anche I_2 e I_3 . Essendo $\underline{E}$ matrice simmetrica, essa possiede autovalori reali e autovettori mutuamente ortogonali. I tre λ sono soluzioni reali. Si dicono λ_I, λ_{II} e λ_{III} , solitamente con $\lambda_I \geq \lambda_{II} \geq \lambda_{III}$ e si chiamano deformazioni principali. Si ottengono quindi $\underline{\varepsilon}_I \geq \underline{\varepsilon}_{II} \geq \underline{\varepsilon}_{III}$ con direzioni principali $\underline{m}_I, \underline{m}_{II}$ e $\underline{m}_{III}$:

$$\lambda_I = \underline{\varepsilon}_I \Rightarrow \underline{m}_I \quad \lambda_{II} = \underline{\varepsilon}_{II} \Rightarrow \underline{m}_{II} \quad \lambda_{III} = \underline{\varepsilon}_{III} \Rightarrow \underline{m}_{III}$$

Essendo gli autovettori calcolati a meno di una costante, se $\underline{m}_I$ è soluzione, lo è pure $\beta \underline{m}_I$, con β costante reale. Si impone tuttavia una condizione di normalizzazione:

$$m_I^2 + m_{II}^2 + m_{III}^2 = 1$$

Ottimizza la terza principale, vediamo la deformazione di un parallelepipedo:



$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_I & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\varepsilon}_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\varepsilon}_{III} \end{bmatrix}$$

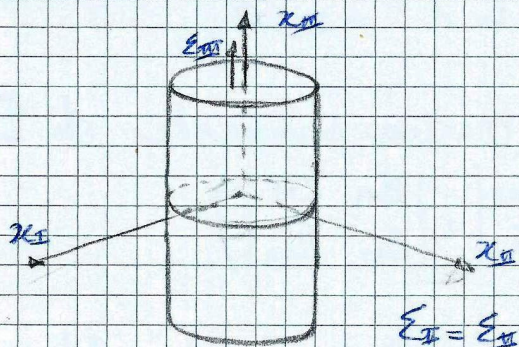
Le deformazioni principali sono valori estremali per la deformazione nel punto: $\underline{\varepsilon}_I$ è la massima deformazione, $\underline{\varepsilon}_{III}$ la minima.

Due casi particolari sono:

DEFORMAZIONE CILINDRICA

Radice doppia: $\underline{\varepsilon}_I = \underline{\varepsilon}_{II} \neq \underline{\varepsilon}_{III}$
 $\underline{m}_I, \underline{m}_{II} \Rightarrow \alpha \underline{m}_I + \beta \underline{m}_{II}$ è
 autovettore per $\underline{E}$.
 ⇒ tutte le direzioni del piano
 di $\underline{m}_I$ e $\underline{m}_{II}$ sono principali.

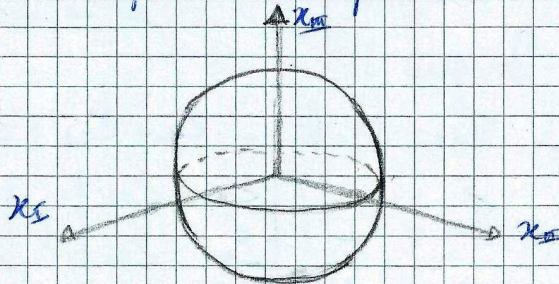
Un cilindro circolare retto rimane
 cilindro circolare retto.



DEFORMAZIONE SFERICA

Radice tripla: $\underline{\varepsilon}_I = \underline{\varepsilon}_{II} = \underline{\varepsilon}_{III}$
 ∀ combinazione lineare $\underline{m}_I, \underline{m}_{II}, \underline{m}_{III}$, cioè $\alpha \underline{m}_I + \beta \underline{m}_{II} + \gamma \underline{m}_{III}$
 è autovettore di $\underline{E}$. Quindi
 tutte le direzioni dello spazio
 sono principali.

Una sfera rimane sfera!



Stato piano di deformazione

8

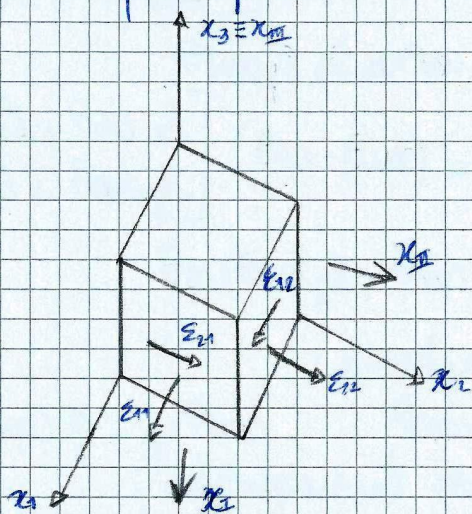
Uno stato di deformazione si dice piano se, al variare di n , il vettore $\underline{e}_n$ si mantiene parallelo ad uno stesso piano, detto piano della deformazione. Dato che $\underline{e}_n = \sum_{j=1}^3 \underline{e}_j m_j$, condizione necessaria e sufficiente affinché lo stato deformativo sia piano è che i tre vettori $\underline{e}_j$ siano nello stesso piano:

$$\underline{E} = [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] \text{ stato piano} \Leftrightarrow \det \underline{E} = 0 \Rightarrow I_3 = 0$$

I_3 , essendo il determinante di $\underline{E}$ che è nullo (riducendosi dal 3 spazio al piano una matrice 3×3 deve avere determinante nullo), vale zero. L'equazione caratteristica diventa:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda = 0$$

Quindi $\lambda = 0$ è soluzione. Di solito si ha $I_{III} = E_{III} = 0$. Rimbalza quindi nella direzione principale m_{III} . Dovremo trovare, nel piano della deformazione, le altre due deformazioni principali. Esse rendono la matrice $\underline{E}$ diagonale:



$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{E}_d = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

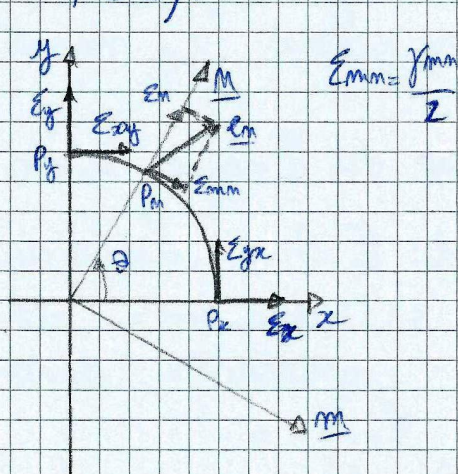
Il caso generico è biassiale, quello piano e biassiale, quello con $I_2 = 0$ e $I_3 = 0$, cioè $E_{II} = E_{III} = 0$ è monoassiale. Nel caso biassiale o in cui $E_{23} = E_{32} = 0$ (ma $E_{33} \neq 0$) si studia la matrice ristretta al piano:

Cioè:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ o } \underline{E}_2 = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

La circonferenza di Mohr

Vorremmo dare una rappresentazione grafica della deformazione: la circonferenza di Mohr. Per capire di cosa si tratta cominceremo dal caso piano (con notazione ingegneristica, ϵ_{xy} al posto di $\gamma_{xy}/2$):



$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon}_m = \underline{m} \cdot \underline{e}_m = \underline{m} \cdot \hat{E} \cdot \underline{m} = \underline{m}^T \cdot \hat{E} \cdot \underline{m}$$

$$\underline{\epsilon}_{mn} = \underline{m}_n \cdot \underline{e}_m = \underline{m}_n \cdot \hat{E} \cdot \underline{m} = \underline{m}_n^T \cdot \hat{E} \cdot \underline{m}$$

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \underline{m}_n = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= (\cos\theta, \sin\theta) \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta) \begin{bmatrix} \epsilon_x \cos\theta + \epsilon_{xy} \sin\theta \\ \epsilon_{yx} \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \end{bmatrix} \\ &= \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_{xy} \sin\theta \cos\theta + \epsilon_{yx} \cos\theta \sin\theta + \epsilon_y \sin^2\theta \\ \epsilon_{mn} &= (\sin\theta, -\cos\theta) \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta) \begin{bmatrix} \epsilon_x \cos\theta + \epsilon_{xy} \sin\theta \\ \epsilon_{yx} \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \end{bmatrix} \\ &= \epsilon_x \cos\theta \sin\theta + \epsilon_{xy} \sin^2\theta - \epsilon_{yx} \cos^2\theta - \epsilon_y \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

Usando le seguenti formule trigonometriche:

$$2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

Quindi, considerando che $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ per la reciprocità:

$$\begin{aligned} \epsilon_m &= \epsilon_x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \epsilon_{xy} \frac{\sin 2\theta}{2} + \epsilon_{yx} \frac{\sin 2\theta}{2} + \epsilon_y \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) = \\ &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \\ \epsilon_{mn} &= \epsilon_x \frac{\sin 2\theta}{2} + \epsilon_{xy} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \epsilon_{yx} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \epsilon_y \frac{\sin 2\theta}{2} = \\ &= \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta - \epsilon_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Se $\epsilon_{mn} = 0$ abbiamo la direzione principale:

$$\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta - \epsilon_{xy} \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\Rightarrow \theta_I, \theta_{II} = \theta_I + \frac{\pi}{2}$$

Mostriamo che le equazioni di ϵ_m e ϵ_{mn} descrivono una circonferenza senza in forma parametrica (in funzione di θ). Possiamo

a primo membro il termine nullo ed elevando al quadrato

$$\begin{cases} \left(\bar{E}_m - \frac{E_x + E_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{E_x - E_y}{2} \cos 2\theta + E_{xy} \sin 2\theta \right)^2 \\ (\bar{E}_{mm})^2 = \left(\frac{E_x - E_y}{2} \sin 2\theta - E_{xy} \cos 2\theta \right)^2 \end{cases}$$

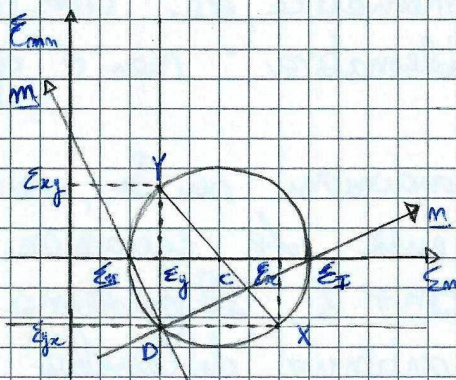
Sommando membro a membro

$$\begin{aligned} \left(\bar{E}_m - \frac{E_x + E_y}{2} \right)^2 + (\bar{E}_{mm})^2 &= \left(\frac{E_x - E_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + E_{xy}^2 \sin^2 2\theta + \frac{(E_x - E_y) E_{xy} \cos 2\theta}{2} \\ &\quad + \left(\frac{E_x - E_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + E_{xy}^2 \cos^2 2\theta - \frac{(E_x - E_y) E_{xy} \cos 2\theta}{2} \\ \Rightarrow \left(\bar{E}_m - \frac{E_x + E_y}{2} \right)^2 + \bar{E}_{mm}^2 &= \left(\frac{E_x - E_y}{2} \right)^2 + E_{xy}^2 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una circonferenza nel piano $\bar{E}_m$ e $\bar{E}_{mm}$: è la circonferenza di Mohr. Centro e raggio sono:

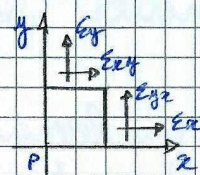
$$C \equiv \left(\frac{E_x + E_y}{2}, 0 \right) \quad R = \sqrt{\left(\frac{E_x - E_y}{2} \right)^2 + E_{xy}^2}$$

Per $\bar{E}_{mm} = 0$ si ottengono le deformazioni principali, cioè le intersezioni della circonferenza con l'asse $\bar{E}_m$. La circonferenza rappresenta quindi l'insieme di tutte le coppie $\underline{m}$ e $\underline{m}$ possibili.



Passo da seguire per la costruzione del cerchio di Mohr:

- si posizionano nel piano $\bar{E}_m$ $\bar{E}_{mm}$ i punti i punti $X = (E_x, E_{xy})$ e $Y = (E_y, -E_{xy})$, assumendo positivi E_{xy} (o E_{yx}) che danno momento σ_z rispetto a p.



- si traccia il diametro $X-Y$ del cerchio, il cui centro C è l'intersezione tra $X-Y$ e l'asse $\bar{E}_m$. Si traccia il cerchio di Mohr;
- si tracciano la parallela a $\bar{E}_m$ passante per X e la parallela a $\bar{E}_{mm}$ passante per Y . L'intersezione tra le due viene chiamata D ;
- collegando D alle intersezioni della circonferenza con $\bar{E}_m$ si ottengono i due assi principali $\underline{m}$ e $\underline{m}$.

Il problema cinematico

Il legame tra la deformazione $\underline{\varepsilon}$ e lo spostamento $\underline{u}$ è dato da un'equazione differenziale. Per poter scrivere il problema cinematico nella forma $\underline{D}\underline{u} = \underline{\varepsilon}$ scriviamo le matrici in forma operazionale, cioè come segue:

$$\underline{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_z \\ 0 & D_z & D_y \\ D_z & 0 & D_x \\ D_y & D_x & 0 \end{bmatrix}$$

Con $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Nel caso di trave piana le equazioni di compatibilità erano solo tre!

$$\underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{u}}{ds}$$

$$y = \frac{dv}{ds} + \varphi$$

$$x = \frac{dw}{ds} + c.c$$

La trave è sempre internamente ipocinematica: sono le condizioni al contorno a renderla esternamente (e quindi complessivamente) ipocinematica, ipocinematica, ecc. Nel caso di continuo la questione è più problematica: non è garantita l'ipocinematicità interna.

Assegnato $\underline{\varepsilon}$ e date opportune condizioni su S_u , si determina il campo di spostamenti $\underline{u}$ congruente. Le equazioni bilanciate sono 6, mentre le incognite sono 3. Il problema è, in generale, impossibile. Quindi il continuo di Cauchy è localmente internamente impossibile. Non si può risolvere il problema diretto.

Invece il problema inverso ha sempre soluzione a patto che il campo di spostamenti sia regolare. Servono delle particolari condizioni di integrabilità delle equazioni implicite che permettano la risoluzione.

Esattamente le equazioni di congruenza sono 81 (sono quelle che danno le condizioni su $\underline{\varepsilon}$):

$$\varepsilon_{ijk,l} + \varepsilon_{ljk,i} = \varepsilon_{ikl,j} + \varepsilon_{jkl,i} \quad i,j,k,l = 1,2,3 \quad (x,y,z)$$

Tuttavia, di tutte queste equazioni solo sei sono distinte, non accoppiate, e permettono la risoluzione del pro.

tema immerso. Due di esse sono:

- dati $i, j = x$ e $h, k = y$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

- dati $i, j = x$, $k = z$, $h = y$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 E_{yz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_{xz}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 E_{xy}}{\partial x \partial z}$$

Usando $E_{yz} = \gamma_{yz}$ e $E_{xy} = \gamma_{xy}$:

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = 0$$

Scambiando gli indici si ottengono tre equazioni del tipo identico al primo e tre come la seconda. Le equazioni sono valide su domini semplicemente connessi.

In forma compatta si scrive:

$$S^* \cdot \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{0}} \quad i, j, h, k = 1, 2, 3$$

Con S^* operatore di compatibilità cinematica (contenente $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dots$).